

Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie. Applications.

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algèbre*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

I Partie A - Motivations [Man-Mne] [Rom] [Gri]

I.1 Définitions

■ **Déf 1 (Sous-espace propre) :**

■ **Déf 2 (Diagonalisabilité) :**

Rem 3 : Une matrice est diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

■ **Ex 4 :** Matrices diagonalisables à unique valeur propre. Application aux nilpotentes diagonalisables.

I.2 Motivations de la diagonalisation

App 5 : Calcul de puissances

App 6 : Résolution de systèmes linéaires.

App 7 : Résolution de systèmes différentiels.

App 8 : Soit u diagonalisable et F sev de E . Alors F possède un supplémentaire stable par u . ([Man-Mne], 5.14).

II Partie D - Polynômes à la rescousse [Man-Mne] [Rom] [Gri]

II.1 Étude de la diagonalisabilité par les polynômes d'endomorphismes

■ **Déf 9 (Polynôme caractéristique) :**

■ **Ex 10 :** χ_A où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

■ **Déf 11 (Polynôme minimal) :**

Thm 12 (Cayley-Hamilton) :

Thm 13 (Critère de diagonalisabilité par polynôme annulateur) :

Rem 14 : u diagonalisable ssi π_u est scindé à racines simples.

■ **Ex 15 :** Projecteurs et symétries.

■ **Ex 16 :** Diagonalisabilité de A telle que $A^5 = I_n$ suivant le corps.

■ **Ex 17 :** Exemple numérique ([Gri]).

■ **Prop 18 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit) :**

Thm 19 (Critère de diagonalisabilité via χ_u) :

■ **Ex 20 :** Exemple numérique ([Gri]).

II.2 Co-diagonalisation

■ **Déf 21 (Co-diagonalisabilité) :**

Thm 22 (Co-diagonalisation) :

■ **Ex 23 :** Diagonalisabilité de l'endomorphisme $\Theta_{A,B} : M \rightarrow AMB$.

III Partie B - Dans un espace euclidien [Rom] [Cal-Per] [Szp]

III.1 Endomorphismes hermitiens

■ **Déf 24 (Endomorphismes hermitiens, auto-adjoints) :**

■ **Ex 25 :**

Thm 26 (Théorème spectral) :

■ **Dév 27 (Min-Max de Courant-Fischer) :**

■ **Prop 28 (Racines carré) :**

Thm 29 (Décomposition polaire) :

App 30 : Homéomorphisme entre $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$.

App 31 : Distance à une norme matricielle.

App 32 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $(\mathbb{R})$.

III.2 Cas des corps finis

Thm 33 (Dénombrement du nombre de matrices diagonalisables) :

Prop 34 : $A \in (\mathbb{F}_q)$ est diagonalisable si et seulement si $A^q = A$.



Dév 48 (Semi-simplicité et polynôme minimal) :

Ex 49 : Les rotations sont semi-simples.

App 50 (Dunford généralisé) :

IV Partie C - Topologie [Rom]

Prop 35 : Les ensembles $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $(\mathbb{C})$.

Contre-Ex 36 :

Prop 37 : $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $(\mathbb{R})$ et c'est l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

App 38 : L'application $A \rightarrow \pi_A$ n'est pas continue.

V Partie E - Dunford sous tous les angles

V.1 La décomposition habituelle [Szp] [Man-Mne] [Gri]

Thm 39 (Dunford) :

Ex 40 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ex 41 : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Prop 42 (Décomposition de Dunford de l'exponentielle) :

App 43 : A est diagonalisable ssi e^A l'est.

Contre-Ex 44 :

V.2 Endomorphismes semi-simples [Rom]

Déf 45 (Endomorphisme semi-simple) :

Ex 46 : Les endomorphismes diagonalisables sont semi-simples.

Thm 47 (Semi-simplicité dans $\mathbb{C}$) :